Παρατηρήσεις:

1. Αν για κάποιο $\delta=\delta(\varepsilon)$ ισχύει ο ορισμός του ορίου, τότε ο ορισμός αυτός θα ισχύει και για ένα $\delta'=\delta'(\varepsilon)$, τέτοιο που $0<\delta'(\varepsilon)<\delta(\varepsilon)$ (όταν $\sigma\in R$)

2. Αν το $x_o=\sigma\in R$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε ο περιορισμός $x\neq x_o$ εξασφαλίζεται από τη σχέση $0<|x-x_o|$.

3. Όταν το όριο της συνάρτησης είναι αριθμός πραγματικός, τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρούμε το ε οσοδήποτε μικρό. Αν το όριο της συνάρτησης είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$, τότε μπορούμε επίσης χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρούμε το ε οσοδήποτε μεγάλο.

4. Όταν $x \longrightarrow +\infty$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρούμε το x μεγαλύτερο από ένα οποιοδήποτε σταθερό αριθμό α, με την προϋπόθεση όμως η f να ορίζεται στο $(\alpha,+\infty)$.

Ανάλογα αν $x \longrightarrow -\infty$, τότε μπορούμε να θεωρούμε τον x μικρότερο από ένα οποιοδήποτε σταθερό αριθμό α, αρκεί όμως η f να ορίζεται στο διάστημα $(-\infty,\alpha)$.

Παραδείγματα:

1. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-2}=3$.

Απόδειξη: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ζητούμε το όριο, είναι το $R-\{2\}$. Επειδή $x \longrightarrow +\infty$, θα εργαστούμε σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ και σαν τέτοιο θεωρούμε, πχ. το διάστημα $(2,+\infty)$.

Για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-2}=3$, πρέπει για κάθε $\varepsilon>0$, να βρούμε $\delta>0$, τέτοιο ώστε $\forall x\in(2,+\infty)$, με $x>\delta \Longrightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$. Έχουμε:

$|f(x)-3|<\varepsilon \Longleftrightarrow \left|\dfrac{3x+1}{x-2}-3\right|<\varepsilon \Longleftrightarrow \left|\dfrac{3x+1-3x+6}{x-2}\right|<\varepsilon \Longleftrightarrow \dfrac{7}{x-2}<\varepsilon$ (είναι $x>2$ άρα $|x-2|=x-2$) $\Longleftrightarrow 7<\varepsilon x-2\varepsilon \Longleftrightarrow \dfrac{7+2\varepsilon}{\varepsilon}<x$ (1).

Θεωρούμε σαν δ το $\dfrac{7+2\varepsilon}{\varepsilon}$ ή κάποιο μεγαλύτερό του. Έτσι λοιπόν $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\dfrac{7+2\varepsilon}{\varepsilon}$, τέτοιο ώστε $\forall x\in(2,+\infty)$, $x>\dfrac{7+2\varepsilon}{\varepsilon}=\delta$ να ισχύει (λόγω της (1)), $|f(x)-3|<\varepsilon$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-2}=3$.

2. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2+1)=+\infty$.

Απόδειξη: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης της οποίας ζητούμε το όριο είναι το .Επειδή $x\longrightarrow+\infty$, θα εργαστούμε σ' ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, πχ. το $(0,+\infty)$. Για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2+1)=+\infty$, πρέπει για κάθε $\varepsilon>0$ να βρούμε $\delta>0$, τέτοιο που $\forall x\in(0,+\infty)$, με $x>\delta \Longrightarrow f(x)>\varepsilon$. Είναι:

$$f(x)=x^3+x^2+1>x>\varepsilon \quad (1)$$

Θεωρούμε σαν δ το ε οπότε $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\varepsilon>0$, τέτοιο που $\forall x\in(0,+\infty)$, $x>\varepsilon$, συνεπάγεται από την (1) ότι $x^3+x^2+1>\varepsilon$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2+1)=+\infty$.

3. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$.

Απόδειξη: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης της οποίας ζητούμε το όριο είναι το **R**. Επειδή $x \longrightarrow +\infty$, θα εργαστούμε σ' ένα διάστημα της μορφής: $(\alpha,+\infty)$, πχ. το $(0,+\infty)$.

Αρκεί $\forall\varepsilon>0$ να υπάρχει (να βρούμε) $\delta>0$, τέτοιο που $\forall x\in(0,+\infty)$, με $x>\delta \Longrightarrow f(x)<-\varepsilon$. Έχουμε:

$$f(x)<-\varepsilon \Longleftrightarrow -x^2<-\varepsilon \Longleftrightarrow x^2>\varepsilon \Longleftrightarrow x>\sqrt{\varepsilon} \quad (1)$$

Εκλέγουμε $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ $\exists\,\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$, τέτοιο που $\forall x\in(0,+\infty)$, με $x>\delta=\sqrt{\varepsilon} \Longrightarrow$ από τις (1) ότι $f(x)<-\varepsilon$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$.

4. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$.

Απόδειξη: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης της οποίας ζητούμε το όριο είναι το R^*. Επειδή $x \longrightarrow -\infty$, θα εργαστούμε σε ένα διάστημα της μορφής

$(-\infty,\alpha)$, πχ. το $(-\infty,0)$. Αρκεί $\forall\varepsilon>0$ να υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο που $\forall\chi\in(-\infty,0)$ με $\chi<-\delta \implies |f(\chi)-0|<\varepsilon$. Έχουμε:

$$|f(\chi)-0|<\varepsilon \iff \left|\frac{1}{\chi^3}\right|<\varepsilon \iff \frac{1}{|\chi|^3}<\varepsilon \iff \frac{1}{-\chi^3}<\varepsilon \iff -\chi^3>\frac{1}{\varepsilon} \iff \chi<-\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \quad (1)$$

θεωρούμε $\delta=\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$. Επομένως $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$, τέτοιο που $\forall\chi\in(-\infty,0)$, με $\chi<-\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ ισχύει λόγω των (1), ότι $|f(\chi)-0|<\varepsilon$. Επομένως $\lim_{\chi\to-\infty}\frac{1}{\chi^3}=0$.

5. Να δειχθεί ότι $\lim_{\chi\to-\infty}(\chi^2-\chi+1)=+\infty$.

Απόδειξη: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης της οποίας ζητούμε το όριο είναι το R. Επειδή $\chi\longrightarrow-\infty$, θα εργαστούμε σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$, πχ. το $(-\infty,0)$.

Αρκεί $\forall\varepsilon>0$ να υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο που $\forall\chi\in(-\infty,0)$, $\chi<-\delta \implies f(\chi)>\varepsilon$.

Είναι: $f(\chi)=\chi^2-\chi+1>-\chi>\varepsilon \quad (1)$

θεωρούμε σαν δ το ε. Επομένως $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\varepsilon>0$, τέτοιο που

$\forall\chi\in(-\infty,0)$, $\chi<-\delta$ συνεπάγεται λόγω της (1) $f(\chi)>\varepsilon$

Άρα $\lim_{\chi\to-\infty}(\chi^2-\chi+1)=+\infty$.

6. Να δειχθεί ότι $\lim_{\chi\to-\infty}(\chi^3+1)=-\infty$.

Απόδειξη: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης της οποίας ζητούμε το όριο είναι το R. Επειδή $\chi\longrightarrow-\infty$, θα εργαστούμε σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$, πχ. το $(-\infty,0)$. Για να είναι $\lim_{\chi\to-\infty}(\chi^3+1)=-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο που για κάθε $\chi\in(-\infty,0)$, με $\chi<-\delta \implies f(\chi)<-\varepsilon$.

Είναι: $f(\chi)<-\varepsilon \iff \chi^3+1<-\varepsilon \iff \chi^3<-(1+\varepsilon) \iff \chi<-\sqrt[3]{1+\varepsilon} \quad (1)$.

Εκλέγουμε σαν δ το $\sqrt[3]{1+\varepsilon}>0$. Τότε $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\sqrt[3]{1+\varepsilon}$: $\forall\chi\in(-\infty,0)$, με $\chi<-\sqrt[3]{1+\varepsilon}$, προκύπτει από τις (1) ότι $f(\chi)<-\varepsilon$. Άρα $\lim_{\chi\to-\infty}(\chi^3+1)=-\infty$.

7. Να δειχθεί ότι $\lim_{\chi\to2}\frac{4-\chi^2}{\chi-2}=-4$.

Απόδειξη: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης της οποίας ζητούμε το όριο είναι το $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. Για να είναι $\lim_{\chi\to2}\frac{4-\chi^2}{\chi-2}=-4$, πρέπει $\forall\varepsilon>0$ να υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο που $\forall\chi\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$, με $0<|\chi-2|<\delta \implies |f(\chi)-(-4)|<\varepsilon$. Έχουμε: $|f(\chi)-(-4)|<\varepsilon \iff \left|\frac{4-\chi^2}{\chi-2}+4\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{(2-\chi)(2+\chi)}{\chi-2}+4\right|<\varepsilon \iff$

$$\iff |-2-\chi+4|<\varepsilon \iff |-\chi+2|<\varepsilon \iff |\chi-2|<\varepsilon \iff 0<|\chi-2|<\varepsilon \quad (1)$$

θεωρούμε σαν δ το ε, οπότε $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\varepsilon>0$, τέτοιο που:

$\forall\chi\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$, $0<|\chi-2|<\varepsilon \implies$ (λόγω των (1)) ότι $|f(\chi)-(-4)|<\varepsilon$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{x-2}=-4$.

8. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση της οποίας ζητούμε το όριο έχει πεδίο ορισμού το $R-\{1\}$. Για να είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$, πρέπει $\forall\varepsilon>0$ να υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο που $\forall x\in R-\{1\}$, $0<|x-1|<\delta \Longrightarrow f(x)>\varepsilon$. Είναι:

$$f(x)>\varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2}>\varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}>(x-1)^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}>|x-1| \Longleftrightarrow 0<|x-1|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (1)$$

θεωρούμε σαν δ το $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Επομένως $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}>0$, τέτοιο που:

$\forall x\in R-\{1\}$, $0<|x-1|<\delta=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ συνεπάγεται λόγω των (1), $f(x)>\varepsilon$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

9. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-4}{(x-2)^2}=-\infty$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση της οποίας ζητούμε το όριο έχει πεδίο ορισμού το $R-\{2\}$. Για να είναι $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-4}{(x-2)^2}=-\infty$, πρέπει $\forall\varepsilon>0$ να υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο που $\forall x\in R-\{2\}$, $0<|x-2|<\delta \Longrightarrow f(x)<-\varepsilon$. Έχουμε:

$$f(x)<-\varepsilon \Longleftrightarrow \frac{-4}{(x-2)^2}<-\varepsilon \Longleftrightarrow \frac{4}{(x-2)^2}>\varepsilon \Longleftrightarrow \frac{4}{\varepsilon}>(x-2)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{\frac{4}{\varepsilon}}>|x-2| \Longleftrightarrow 0<|x-2|<\sqrt{\frac{4}{\varepsilon}} \quad (1)$$

θεωρούμε σαν δ το $\sqrt{\frac{4}{\varepsilon}}$. Επομένως $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\sqrt{\frac{4}{\varepsilon}}>0$, τέτοιο που $\forall x\in R-\{2\}$, $0<|x-2|<\delta=\sqrt{\frac{4}{\varepsilon}}$, συνεπάγεται λόγω των (1), ότι $f(x)<-\varepsilon$. Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-4}{(x-2)^2}=-\infty$.

10. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-2)=2$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση της οποίας ζητούμε το όριο έχει πεδίο ορισμού το **R**. Επειδή $x\longrightarrow 2^+$, θεωρούμε τον περιορισμό της συνάρτησης στο $(2,+\infty)$.

Για να είναι $\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-2)=2$, πρέπει $\forall\varepsilon>0$ να υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο που $\forall x\in(2,+\infty)$, $0<x-2<\delta \Longrightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$. Είναι:

$|f(x)-2|<\varepsilon \Longleftrightarrow |2x-2-2|<\varepsilon \Longleftrightarrow 2|x-2|<\varepsilon \Longleftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{2} \Longleftrightarrow 0<x-2<\frac{\varepsilon}{2}$ (1)

(διότι $x\in(2,+\infty) \Longleftrightarrow x>2 \Longleftrightarrow x-2>0 \Longleftrightarrow |x-2|=x-2$).

θεωρούμε σαν δ το $\frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$, τέτοιο που $\forall x\in(2,+\infty)$, $0<x-2<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, συνεπάγεται, λόγω των (1), ότι $|f(x)-2|<\varepsilon$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-2)=2$.

11. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|(x+1)}{x}=-1$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{|x|(x+1)}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=R^*$. Ο περιορισμός της f στο $(-\infty,0)$ είναι η συνάρτηση g, με $g(x)=\frac{-x(x+1)}{x}=$ $=-(x+1)$. Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-1$. Πράγματι έστω $\varepsilon>0$. Τότε:

$$|g(x)+1|<\varepsilon \Longleftrightarrow |-(x+1)+1|<\varepsilon \Longleftrightarrow |-x|=|x|<\varepsilon$$

Έτσι, αν $0<\delta\leq\varepsilon$, θα έχουμε $\forall x\in(-\infty,0)$, $|x|<\delta \Longrightarrow |g(x)+1|<\varepsilon$, που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-1$ και συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$.